



LA SYNTHÈSE DE FRÉQUENCE

Joël REDOUTEY

La synthèse de fréquence en radiocommunications

INTRODUCTION

La fréquence d'un oscillateur RF dépend de son circuit d'accord (LC), de l'élément actif (capacités parasites) et de l'environnement (température).

Il est difficile d'obtenir une stabilité satisfaisante de la fréquence d'un oscillateur libre (dérive dans le temps et en température).

On utilise généralement un système d'asservissement de la fréquence à une source de référence (oscillateur à quartz par exemple) qui fait appel à une boucle à verrouillage de phase (Phase Locked Loop).

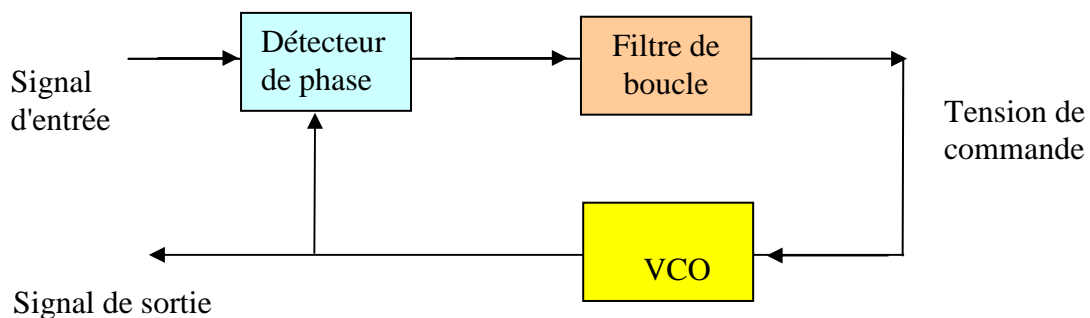
L'utilisation d'un diviseur programmable dans la boucle permet une commande numérique de la fréquence par bonds.

1 BOUCLE A VERROUILLAGE DE PHASE (PLL)

Une boucle à verrouillage de phase (Phase Locked Loop) est un système bouclé capable de délivrer un signal dont la fréquence est asservie à celle d'un signal de référence.

Elle se compose des éléments suivants:

- Un détecteur de phase
- Un filtre passe bas
- Un oscillateur commandé en tension (VCO)



Soit $V_e = E \sin(\omega_e t + \varphi_e)$ l'expression du signal d'entrée et $V_s = E_s \sin(\omega_s t + \varphi_s)$ celle du signal de sortie.

Le comparateur de phase compare la phase du signal d'entrée avec celle du signal délivré par le VCO, et génère un signal d'erreur qui est filtré et appliqué à l'entrée de commande de l'oscillateur (VCO).

Lorsque la boucle est verrouillée (locked), la différence de phase instantanée est constante:

$$V_e = E \sin(\omega_e t + \varphi_e) = E \sin\Phi_e(t)$$

$$V_s = E_s \sin(\omega_s t + \varphi_s) = E_s \sin\Phi_s(t)$$

$$\Phi_s(t) - \Phi_e(t) = \text{constante}$$

$$d\Phi_s(t)/dt - d\Phi_e(t)/dt = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega_s = \omega_e$$

La fréquence du VCO est égale à celle du signal d'entrée.

1.1 Principe de fonctionnement

En l'absence de signal d'entrée, le VCO délivre une tension sinusoïdale de fréquence libre f_0 (free running frequency).

Supposons que l'on utilise un multiplieur analogique comme détecteur de phase.

Si l'on injecte à l'entrée un signal sinusoïdal de fréquence f_e voisine de f_0 , le comparateur délivre un signal $e(t)$:

$$V_e(t) = A_e \sin\Phi_e(t)$$

$$V_0(t) = A_0 \sin\Phi_s(t)$$

$$e(t) = V_e(t)V_0(t) = A_e A_0 \sin\Phi_e(t)\sin\Phi_s(t)$$

d'après la relation trigonométrique $\sin a \cdot \sin b = (1/2)[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ on a :

$$e(t) = (A_e A_0 / 2) \cos[\Phi_e(t) - \Phi_s(t)] - (A_e A_0 / 2) \cos[\Phi_e(t) + \Phi_s(t)]$$

Le signal d'erreur comporte des composantes à $|f_e - f_0|$ et $f_e + f_0$.

Le filtre passe bas ne laissera passer que la composante à basse fréquence $\Delta f = |f_e - f_0|$ qui est appliquée à l'entrée de commande du VCO.

Il en résulte une modulation de la fréquence du VCO par Δf qui devient ainsi une fonction du temps.

On montre que le système converge vers $\Delta f = 0$ si l'écart $f_e - f_0$ se situe à l'intérieur d'un certain domaine appelée *plage de capture* (ou d'acquisition).

Lorsque la boucle est verrouillée, $f_s = f_e$ et le comparateur de phase ne délivre qu'une tension continue V_c proportionnelle à l'écart de phase entre les signaux d'entrée et de sortie.

$$V_c = K_D \Delta \Phi$$

Le temps nécessaire pour obtenir le verrouillage est un paramètre important qui dépend des caractéristiques du filtre de boucle.

1.2 Etude de la boucle verrouillée

Lorsque la boucle à verrouillage de phase (PLL) est verrouillée, elle peut s'étudier comme un système asservi linéaire.

Le schéma bloc du système peut être représenté sous forme de fonctions de transfert comme indiqué ci après:

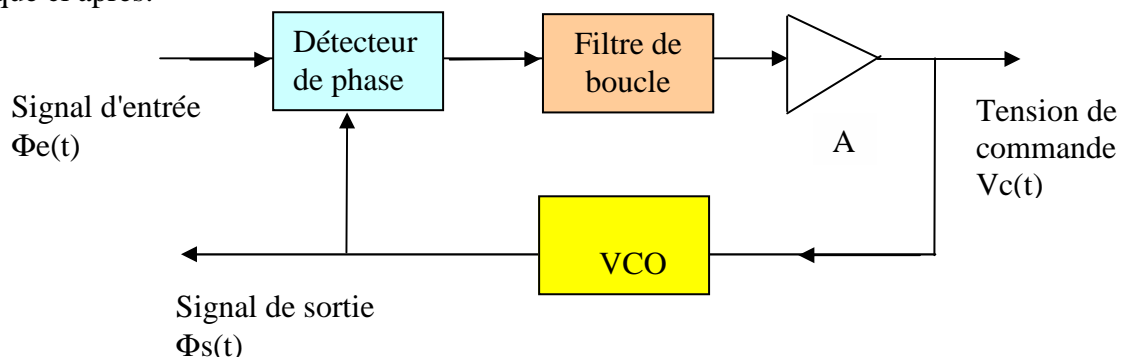
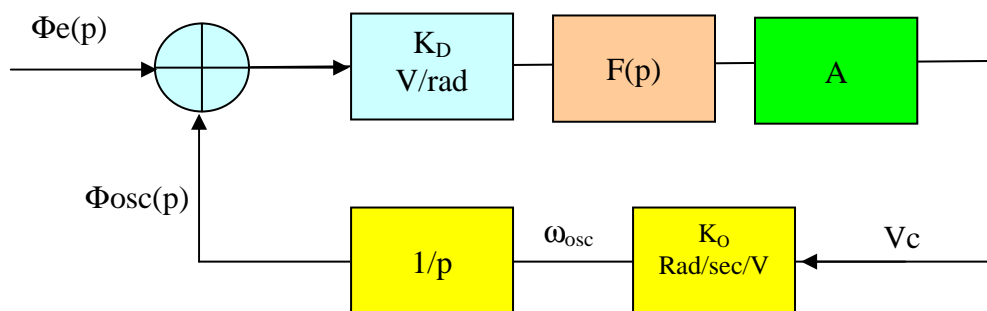


Schéma bloc de la boucle à verrouillage de phase (PLL)



Représentation en fonction de transfert

On notera que la variable d'entrée n'est pas la fréquence f_e , mais la phase $\Phi_e(t)$.

La synthèse de fréquence

$$\omega_e = d\Phi_e/dt \quad \text{d'où:}$$

$$\Phi_e = \Phi_e(t=0) + \int_0^t \omega_e(t) dt$$

Soit en transformée de Laplace, en considérant que la phase à l'origine est nulle:

$$\Phi_e = (1/p) \omega_e(p)$$

On suppose que la fréquence du VCO est proportionnelle à la tension d'erreur V_c .

$$\omega_{OSC} = \omega_0 + K_0 V_C$$

où ω_0 est la fréquence d'oscillation libre du VCO.

La sortie du VCO doit être exprimée en phase puisque le détecteur est sensible à la différence de phase entre le signal d'entrée et la sortie du VCO:

$$\Phi_{OSC} = \Phi_{OSC}(t=0) + \int_0^t \omega_{OSC}(t) dt$$

On constate que le VCO fonctionne comme un intégrateur. Un échelon de tension d'erreur V_c correspond à un échelon de pulsation ω_{OSC} et à une rampe de phase.

Ceci se traduit sur la fonction de transfert par le bloc $1/p$.

Nous avons:

$$\Phi_{OSC}(p) = \omega_{OSC} / p = K_0 V_C(p) / p$$

$$V_C(p) = [\Phi_e(p) - \Phi_{OSC}(p)].K_D.F(p).A$$

On en déduit l'expression:

$$\frac{V_C}{\Phi_e} = \frac{pK_DFA}{p + K_0K_DFA}$$

Qui traduit la caractéristique *phase* \rightarrow *tension* du système.

En utilisant la relation $\Phi_e = (1/p) \omega_e(p)$, on obtient la fonction de transfert *fréquence* \rightarrow *tension* du système:

$$\frac{V_C}{\omega_e} = \frac{K_DFA}{p + K_0K_DFA}$$

En posant $K_L = K_0K_D A$, il vient:

$$\frac{V_C}{\omega_e} = \frac{K_L}{K_0} \frac{F(p)}{[p + K_L F(p)]}$$

Ou, pour la fonction de transfert *fréquence d'entrée* → *fréquence de sortie*:

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = K_L \frac{F(p)}{[p + K_L F(p)]}$$

Cette fonction de transfert dépend de la fonction de transfert F(p) du filtre passe bas.

2 SYNTHETISEUR DE FREQUENCE

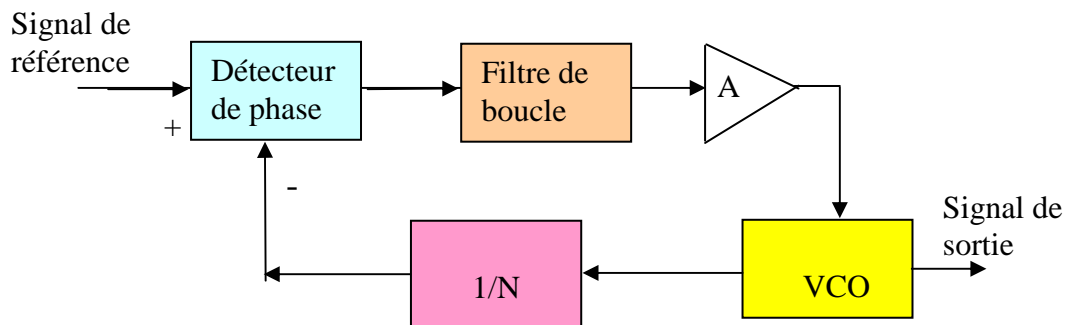


Schéma de principe d'un synthétiseur de fréquence à PLL

Un synthétiseur de fréquence se compose d'une boucle à verrouillage de phase dans laquelle:

- le signal d'entrée est une fréquence de référence stable et précise
- On a introduit un diviseur de fréquence, généralement programmable, entre le VCO et le comparateur de phase.

Il s'agit donc d'une boucle à retour non unitaire.

Le détecteur de phase compare le signal du VCO dont la fréquence est divisée par N au signal de référence. Lorsque la boucle est verrouillée on a:

$$F_{VCO} = N F_{REF}$$

Si N est programmable, la fréquence de sortie peut être rendue variable par bond de F_{REF} .

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors:

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = K_L \frac{F(p)}{[Np + K_L F(p)]}$$

Où $\omega_s = \omega_{VCO} / N$

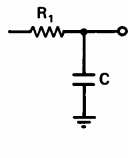
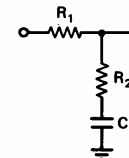
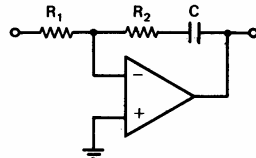
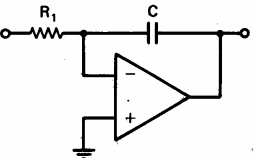

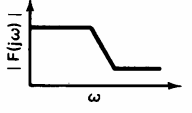
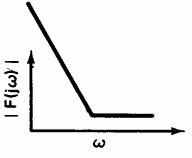
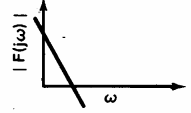
Cette fonction de transfert dépend beaucoup de la fonction de transfert F(p) du filtre de boucle.

2.1 Filtre de boucle

Le filtre de boucle est de type passe bas.

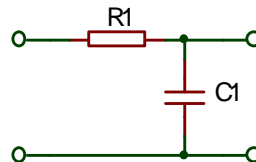
Plusieurs structures sont envisageables, donnant généralement une fonction de transfert bouclée d'ordre 2 ou 3.

TABLE 1-3 CIRCUIT AND TRANSFER CHARACTERISTICS OF SEVERAL PLL FILTERS

Type	Passive		Active	
	1	2	3	4
Circuit				
Transfer characteristic				
F(jω) =	$\frac{1}{1 + j\omega\tau_1}$	$\frac{1 + j\omega\tau_2}{1 + j\omega(\tau_1 + \tau_2)}$	$\frac{1 + j\omega\tau_2}{j\omega\tau_1}$	$\frac{1}{j\omega\tau_1}$
	$\tau_1 = R_1 C$		$\tau_2 = R_2 C$	

2.1.1 Filtre passe bas RC

Examinons le cas où l'on utilise un simple circuit $R_1 C_1$.



La fonction de transfert de ce circuit s'écrit:

$$F(p) = 1 / (1 + R_1 C_1 p) = 1 / (1 + p / \omega_1)$$

Avec $\omega_1 = 1 / R_1 C_1$ pulsation de coupure du filtre.

En remplaçant F(p) par son expression dans la fonction de transfert, on obtient:

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = K_L \frac{1}{Np + \frac{K_L}{1 + \frac{p}{\omega_1}}} = K_L \frac{1}{\frac{N}{\omega_1} p^2 + Np + K_L}$$

Nous sommes en présence d'une fonction de transfert du second ordre.

La synthèse de fréquence

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{1}{\frac{N}{K_L \omega_1} p^2 + \frac{N}{K_L} p + 1}$$

Qui admet deux pôles:

$$p_1, p_2 = -\frac{\omega_1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4K_L}{N\omega_1}} \right)$$

En identifiant à la forme canonique:

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

on obtient :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_1 K_L}{N}} \qquad \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_1 N}{K_L}}$$

ω_n est la *pulsation naturelle* et ξ est l'*amortissement*.

Si $\xi > 1$ la réponse est amortie, si $\xi < 1$ la réponse est oscillatoire.

Le diagramme de Bode obtenu est alors le suivant (boucle ouverte):

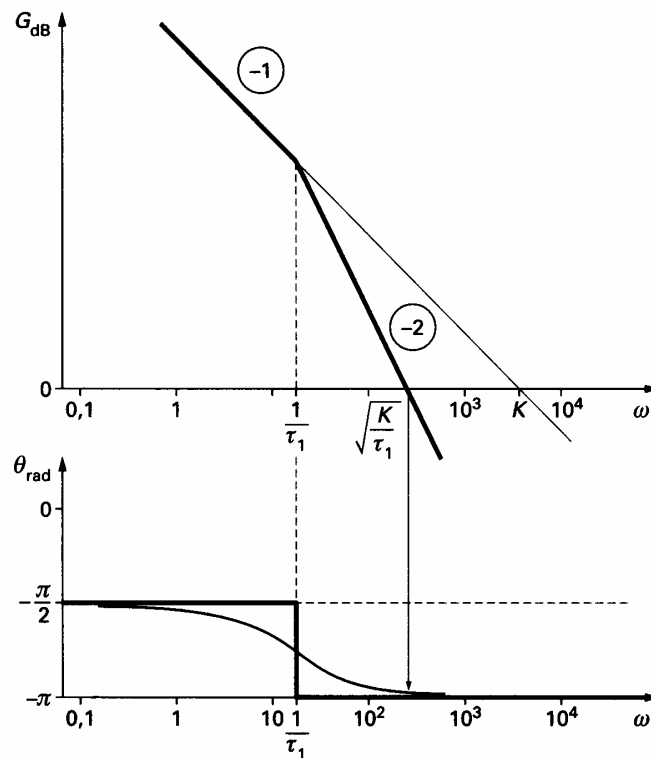


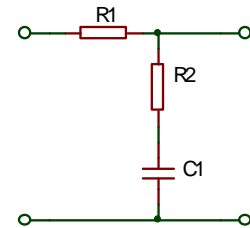
Diagramme de Bode pour une boucle avec filtre passe-bas ($\tau_1 = R_1 C_1$, $N = 1$)

2.1.2 Filtre passe bas avec correcteur par avance de phase

Dans la pratique, on désire souvent une large plage de verrouillage de manière à pouvoir suivre de grandes variations de la fréquence d'entrée, et une bande passante faible afin de rejeter les signaux hors bande.

Ces contraintes sont relativement bien satisfaites en utilisant un filtre à avance de phase dont la fonction de transfert est:

$$F(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_2}}{1 + \frac{p}{\omega_1}} = \frac{R_2 C_1 p + 1}{(R_1 + R_2) C_1 p + 1}$$



Avec $\omega_1 = 1/(R_1 + R_2)C_1$ et $\omega_2 = 1/R_2 C_1$ $\omega_2 \gg \omega_1$

En remplaçant $F(p)$ par son expression, on obtient la fonction de transfert en boucle fermée:

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\frac{p}{\omega_2} + 1}{\frac{Np^2}{K_L \omega_1} + \left(\frac{N}{K_L} + \frac{1}{\omega_2}\right)p + 1}$$

En identifiant le dénominateur à la forme canonique on obtient:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_1 K_L}{N}} = \sqrt{\frac{K_L}{N(R_1 + R_2)C_1}}$$

$$\xi = 0,5 \omega_n (R_2 C_1 + N/K_L)$$

La fonction de transfert en boucle fermée peut alors se mettre sous la forme:

$$H(p) = \frac{\left(\frac{2\xi}{\omega_n} - \frac{N}{K_L}\right)p + 1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}p + 1}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit:

$$G(p) = \frac{K_L}{Np} \cdot \frac{R_2 C_1 p + 1}{(R_1 + R_2) C_1 p + 1}$$

La synthèse de fréquence

Ce filtre permet de conserver un gain de boucle élevé et une bande passante étroite sans que le système soit sous amorti, on peut en effet choisir le coefficient d'amortissement ξ indépendamment de la pulsation propre ω_n .

Le diagramme de Bode montre que la marge de phase est voisine de 45°

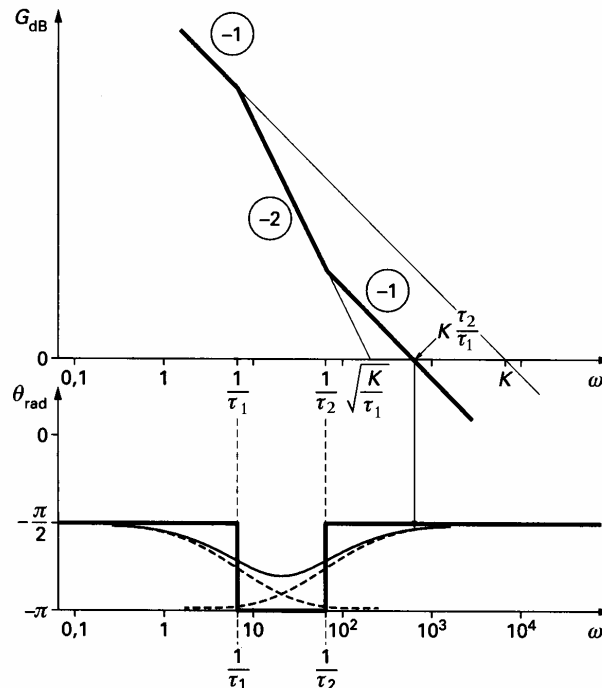
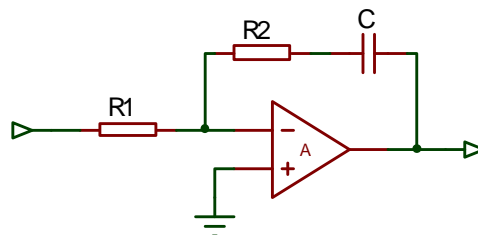


Diagramme de Bode pour la boucle ouverte avec correcteur par avance de phase
 $(\tau_1 = (R_1+R_2)C_1 \quad \tau_2 = R_2C_1 \quad N=1)$

2.1.3 Filtre actif



L'utilisation d'un amplificateur permet d'augmenter le gain statique et donc la précision du système. L'amplificateur utilisé doit être un modèle à faible bruit.

La fonction de transfert de ce filtre s'écrit en supposant que A est très grand:

$$F(p) = \frac{R_2 Cp + 1}{R_1 Cp}$$

En remplaçant dans l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée du système, on obtient:

La synthèse de fréquence

$$H(p) = \frac{(R_2 C p + 1)}{\frac{N R_1 C}{K_L} p^2 + R_2 C p + 1}$$

soit

$$H(p) = \frac{(2\xi \frac{p}{\omega_n} + 1)}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + 1}$$

Avec:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_L}{N R_1 C}} \quad \xi = \frac{\omega_n R_2 C}{2}$$

Nous sommes en présence d'un système du second ordre.

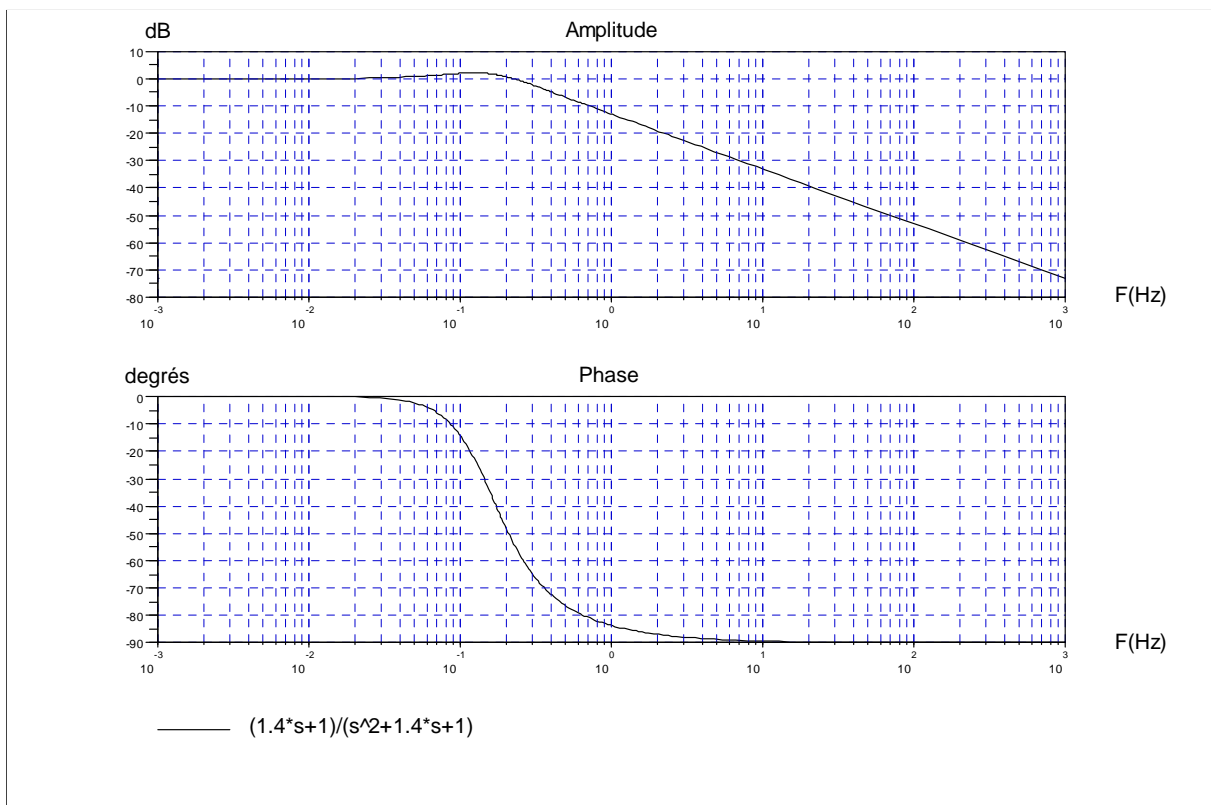
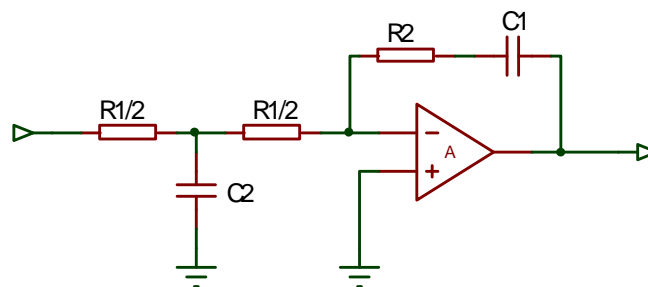


Diagramme de Bode en boucle fermée pour $\omega_n = 1$, $\xi = 0,7$

Filtrage de la fréquence de comparaison

Dans beaucoup d'applications, on ajoute un filtrage supplémentaire de manière à éliminer les résidus de la fréquence de comparaison qui se traduisent par des raies parasites autour de la fréquence centrale.

Ceci peut s'effectuer en divisant la résistance $R1$ en deux résistances égales et en connectant au point milieu un condensateur $C2$ en dérivation vers la masse.

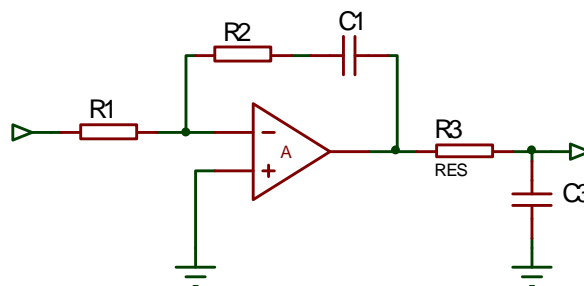


Filtrage additionnel de la fréquence de comparaison

Le condensateur $C2$ est choisi de manière à ce que la fréquence de coupure de ce filtre additionnel ne modifie pas notablement la bande passante du système.

On pourra prendre par exemple la fréquence de coupure du filtre additionnel supérieure ou égale à dix fois la fréquence de coupure de la boucle.

On peut également ajouter une cellule R3C3 supplémentaire derrière le filtre de boucle.



Une autre méthode de filtrage additionnel de la fréquence de comparaison.

Comme précédemment, la réponse de ce filtre ne doit pas interférer avec celle du filtre de boucle. Dans le cas contraire, on obtient un système du troisième ordre.

2.2 Exemple

On utilise un circuit MC145151 (voir notice) pour réaliser un synthétiseur dans la bande FM (88-108 MHz) au pas de 100 kHz. La fréquence centrale est choisie à 100 MHz.

On utilise un prédiviseur par 8 car la fréquence maximale de fonctionnement du MC145151 est de 25 MHz.

Le circuit possède un comparateur de phase à trois états (three states) avec sortie unique ou sortie différentielle.

2.2.1 Filtre de boucle passif

Nous utiliserons la sortie unique et un filtre de boucle passif de type à avance de phase.

Pour la sortie unique, le gain du comparateur de phase est $V_{dd}/4\pi$.

La courbe fréquence = f (tension de commande) du VCO a été relevée et l'on a autour de 100 MHz une pente $K_0 = 3,5 \text{ MHz/V}$

$V_{dd} = 8\text{V}$

$$K_D = 2/\pi = 0,637 \text{ V/rad}$$

$$K_0 = 3,5 \text{ MHz/V} = 2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^6 \text{ rad/s/V} = 21,98 \cdot 10^6 \text{ rad/s/V}$$

On en déduit

$$K_L = K_D K_0 = 14 \cdot 10^6$$

$$f_{\text{comp}} = 100\text{kHz} / 8 = 12,5 \text{ kHz}$$

$$f_{\text{sortie}} = 100 \text{ MHz}$$

$$\text{D'où } N = 8000$$

On fixe

$$f_n = \omega_n / 2\pi = 25 \text{ Hz}$$

$$\xi = 0,7$$

$$C = C_1 = 1\mu\text{F}$$

On a

$$\xi = 0,5\omega_n(R_2C_1 + N/K_L)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_1 K_L}{N}} = \sqrt{\frac{K_L}{N(R_1 + R_2)C_1}}$$

On en déduit :

$$R_2 = \left(\frac{2\xi}{\omega_n} - \frac{N}{K} \right) \frac{1}{C}$$

$$R_1 = \frac{K}{NC\omega_n^2} - R_2$$

soit ici :

$$R_2 = 8\,346 \, \Omega$$

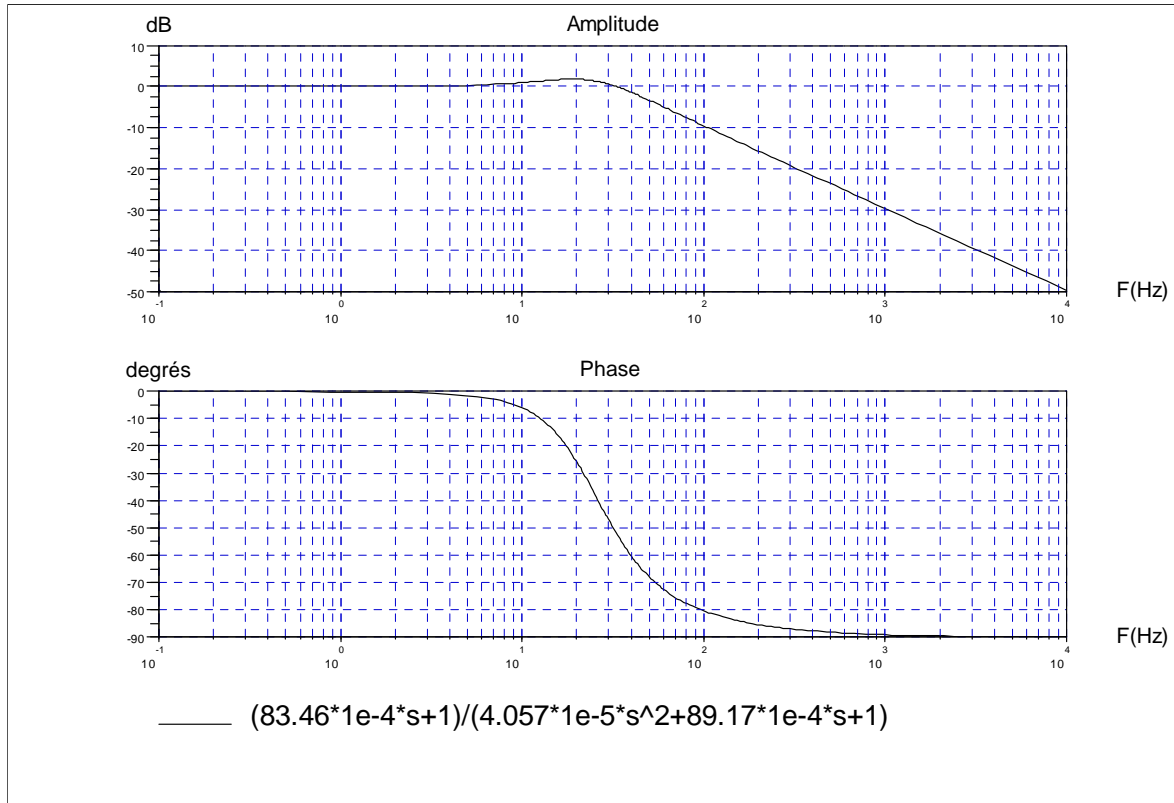
$$R_1 = 62\,629 \, \Omega$$

On prendra $R_1 = 68 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 8,2 \text{ k}\Omega$

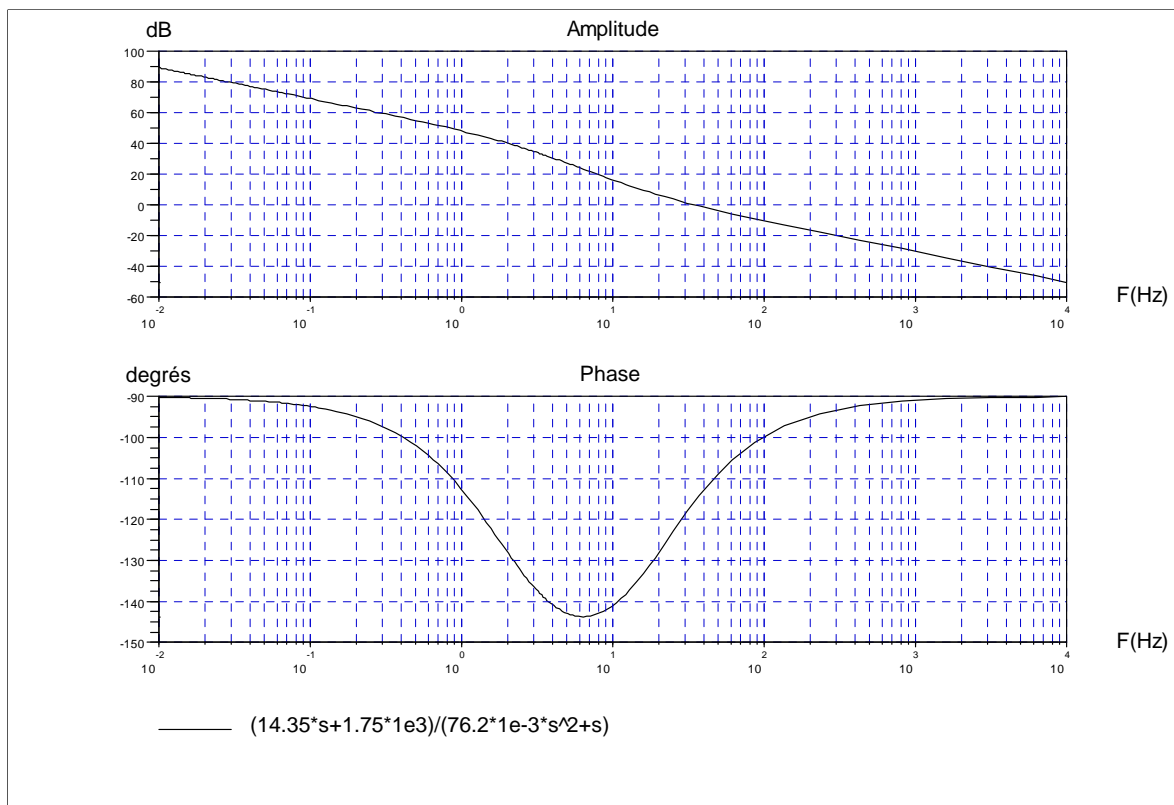
On obtient le diagramme de Bode suivant pour le système bouclé

La fréquence de coupure à -3 dB est voisine de 50 Hz.

La synthèse de fréquence



Le diagramme de Bode en boucle ouverte est le suivant :



2.2.2 Filtre de boucle actif

Nous utiliserons la sortie différentielle et un filtre de boucle actif de type à avance de phase. Pour la sortie différentielle, le gain du comparateur de phase est $V_{dd}/2\pi$. La courbe fréquence = f (tension de commande) du VCO a été relevée et l'on a autour de 100 MHz une pente $K_0 = 3,5 \text{ MHz/V}$

$$\begin{aligned} V_{dd} &= 8\text{V} & K_D &= 4/\pi = 1,273 \text{ V/rad} \\ & & K_0 &= 3,5 \text{ MHz/V} = 2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^6 \text{ rad/s/V} = 21,98 \cdot 10^6 \text{ rad/s/V} \\ \text{On en déduit} & & K_L &= K_D K_0 = 28 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{comp}} &= 100\text{kHz} / 8 = 12,5 \text{ kHz} \\ F_{\text{sortie}} &= 100 \text{ MHz} \\ \text{D'où } N &= 8000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On fixe} \quad f_n &= \omega_n/2\pi = 25 \text{ Hz} \\ \xi &= 0,707 \\ C_1 &= 1\mu\text{F} \end{aligned}$$

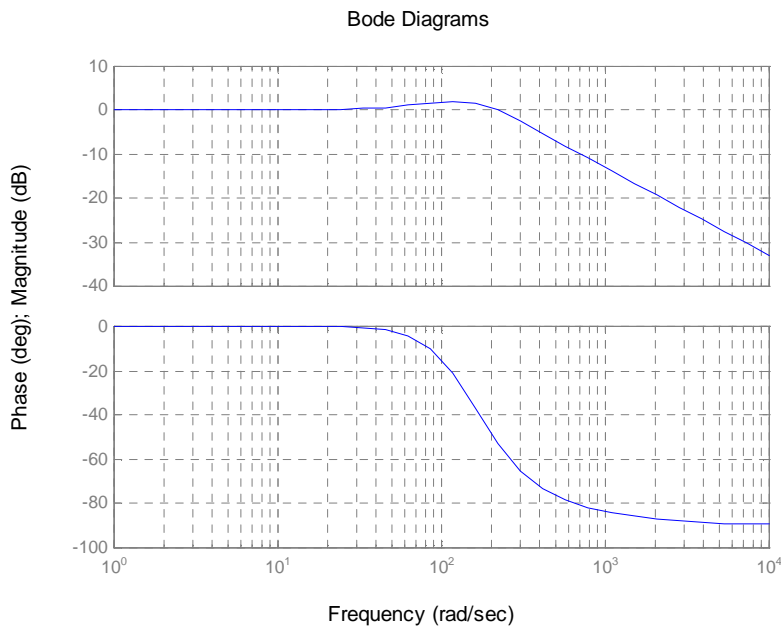
On a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_L}{NR_1C}} \qquad \xi = \frac{\omega_n R_2 C}{2}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \text{Soit:} \quad R_1 &= K_L/NC\omega_n^2 \quad \text{et} \quad R_2 = 2\xi/C\omega_n \\ R_1 &= 28 \cdot 10^6 / 8000 \cdot 10^{-6} \cdot (25 \cdot 2\pi)^2 \approx 140 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 1,414 / (10^{-6} \cdot 25 \cdot 2\pi) = 9 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Le diagramme de Bode en boucle fermée est alors le suivant:



On note une fréquence de coupure d'environ 50 Hz.

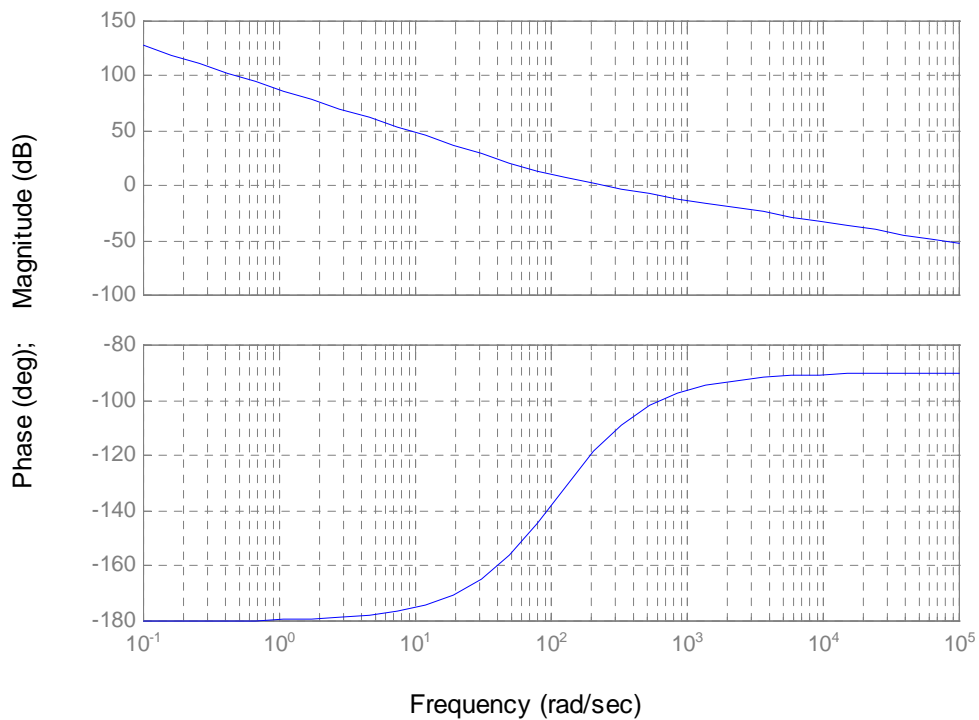
La synthèse de fréquence

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit:

$$G(p) = \frac{K_L}{N} \frac{R_2 Cp + 1}{R_1 Cp^2}$$

Soit, dans ce cas:

Boucle ouverte



$$KL/N = 3,5 \cdot 10^3 \quad R_1 C = 140 \cdot 10^{-3} \quad R_2 C = 9 \cdot 10^{-3}$$

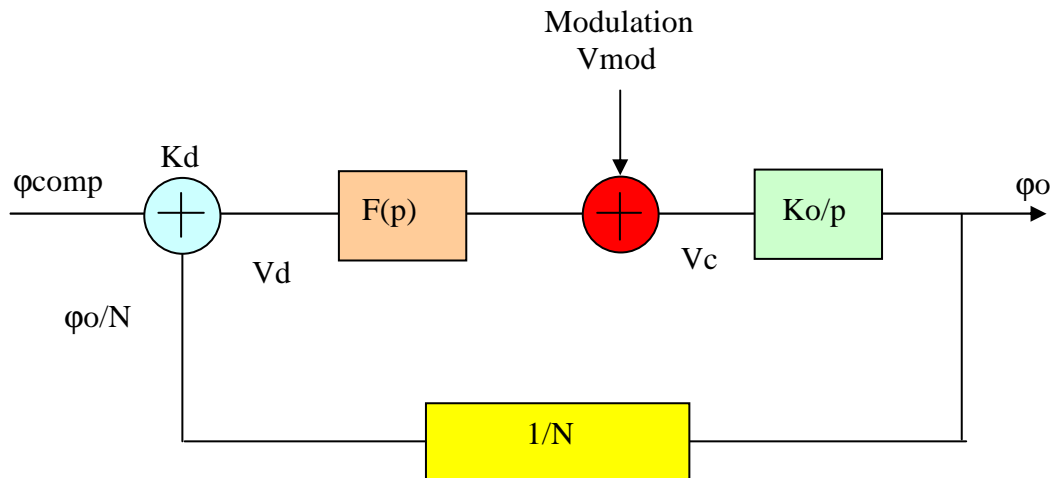
On constate que la boucle est inconditionnellement stable puisque la phase est toujours supérieure à -180° .

On pourra ajouter un filtrage supplémentaire de la fréquence de comparaison en divisant la résistance R_1 en deux et en ajoutant un condensateur comme indiqué précédemment.

En prenant une fréquence de coupure 10 fois supérieure à celle de la boucle on a:

$$\omega_{rc} = 500,6,28 = 3141 \text{ rad/s} \quad R = R_1/2 = 70 \text{ k}\Omega \quad \text{d'où } C = 4,5 \text{ nF}$$

2.3 Modulation de fréquence de la boucle à verrouillage de phase



Le signal de modulation est appliqué à l'entrée du VCO.

La tension de commande du VCO s'écrit donc:

$$V_c(p) = V_{mod} + V_d F(p)$$

La phase du signal de sortie est alors:

$$\varphi_0(p) = V_c(p) K_0/p$$

Le signal de sortie du comparateur de phase est donné par:

$$V_d = K_d[\varphi_{comp} - \varphi_0/N]$$

En combinant ces trois équations il vient:

$$\varphi_0(p) = \frac{NK_0}{Np + K_0 K_D F(p)} V_{mod} + \frac{NK_0 K_D F(p)}{Np + K_0 K_D F(p)} \varphi_{comp}$$

$F(p)$ est la fonction de transfert du filtre de boucle

$H(p)$ est la fonction de transfert du système bouclé

$$\varphi_0(p) = \frac{NK_0}{Np + K_0 K_D F(p)} V_{mod} + H(p) \varphi_{comp}$$

Le premier terme correspond à la modulation et le second terme est représentatif de la stabilisation de la fréquence centrale.

La fonction de transfert de la modulation s'écrit donc:

$$\frac{\varphi_0(p)}{V_{mod}} = \frac{NK_0}{Np + K_0 K_D F(p)}$$

Exemple du filtre passif passe bas avec avance de phase

Le fonction de transfert du filtre est:

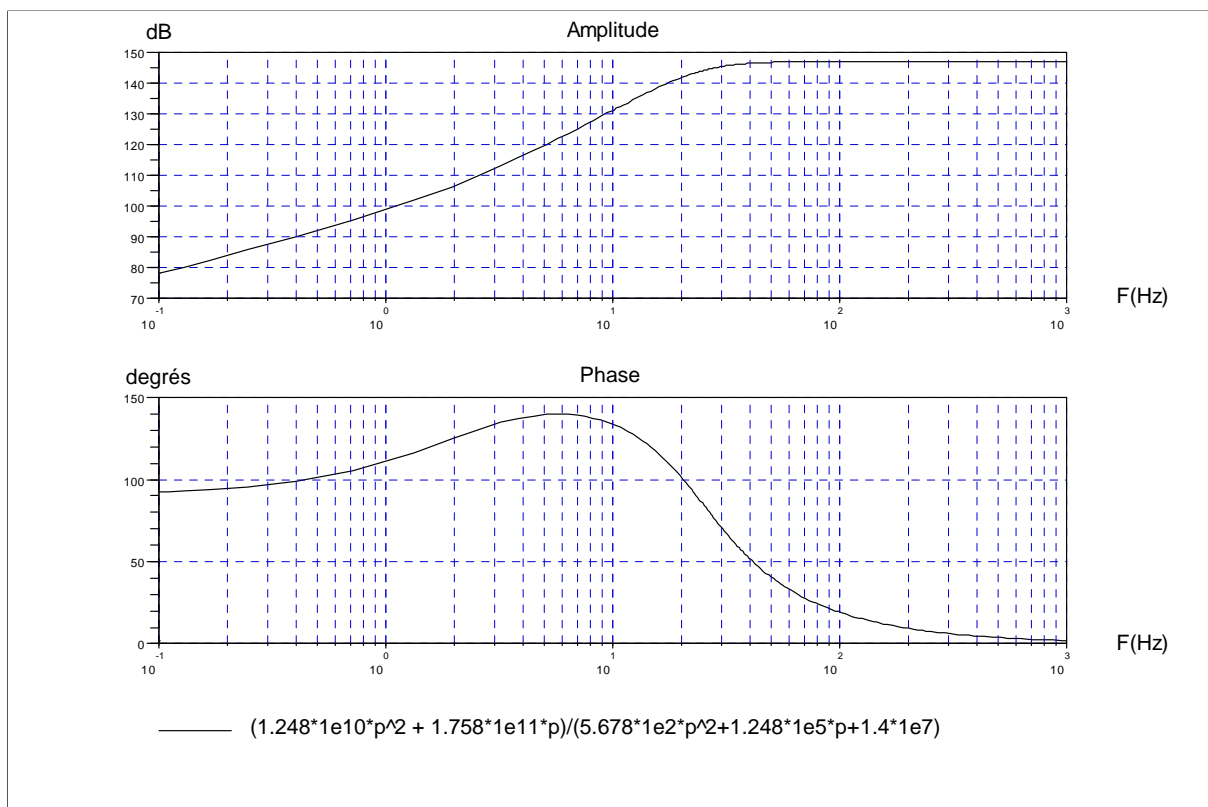
$$F(p) = \frac{1 + R_2 C p}{1 + (R_1 + R_2) C p}$$

En remplaçant F(p) par son expression et en remarquant que la fréquence est la dérivée de la phase $\omega(p) = p \phi(p)$

La fonction de transfert de la modulation devient:

$$\frac{\omega_0}{V_{mod}} = \frac{NK_0(R_1 + R_2)Cp^2 + NK_0p}{N(R_1 + R_2)Cp^2 + (N + K_0K_D R_2 C)p + K_0K_D}$$

En utilisant les valeurs calculées précédemment, on obtient le diagramme de Bode suivant:



On constate que le système se comporte comme un filtre passe haut.

Ce type de modulateur n'admet pas de signal possédant une composante continue.

Pour un fonctionnement correct, la modulation ne doit pas agir sur la stabilisation de la fréquence. Il est donc impératif que la fréquence de coupure de la boucle à verrouillage de phase soit inférieure à la fréquence la plus basse du signal à transmettre.

Références

J. Encinas - Systèmes à verrouillage de phase - MASSON

François de Dieuleveult - Electronique appliquée aux hautes fréquences -Dunod

Ulrich L Rhode - Digital frequency synthesizers , theory and design - Prentice-Hall

Jack Smith - Modern communication circuits - Mac Graw-Hill